Početní část 1 - 25.1.2021

1. Zkusíme dokázat o něco silnější tvrzení

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arccos(1-x) - \sqrt{2x}}{x^{3/2}} = c \in \mathbb{R}.$$

Jedná se o limitu typu "0/0", mohu zkusit použít l'Hospitalovo pravidlo. Po zderivování čitatele i jmenovatele a několika úpravách dostanu

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3x} \cdot \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{\sqrt{2}\sqrt{2-x}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2-x}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{12}.$$

Odtud již plyne, že pro každou konstantu $C > \sqrt{2}/12$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}} - \sqrt{2} \le Cx, \quad \forall x \in (0,\delta).$$

2. Definiční obor je očividně $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Limity v krajních bodech definičního oboru:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1_-} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1_+} f(x) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

Funkce nemá žádné očividné symetrie, na souvislých částech svého definičního oboru je spojitá. První derivace (por $x \in D_f$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\frac{1}{1-x}} + (x-3)e^{\frac{1}{1-x}} \cdot (-1)\frac{1}{(1-x)^2} \cdot (-1) \\ &= e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(1-x)^2 + x - 3}{(1-x)^2} = e^{\frac{1}{1-x}} \frac{x^2 - x - 2}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

Stacionární body: $x = -1$, $x = 2$.

f je rostoucí na $(-\infty, -1)$, klesající na $(-1, 1)$, klesající na $(1, 2)$ a rostoucí na $(2, \infty)$. V bodě $x = -1$ je lokální maximum v hodnotě $-4\sqrt{e}$ a v bodě $x = 2$ je lokální minimum v hodnotě $-\frac{1}{e}$. Obor hodnot je proto $(-\infty, -4\sqrt{e}] \cup [-\frac{1}{e}, +\infty)$. Dále

$$\lim_{x\to 1_-} f'(x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1_+} f'(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1.$$

Druhá derivace:

$$\begin{aligned} f''(x) &= e^{\frac{1}{1-x}} \frac{x^2 - x - 2}{(1-x)^4} + e^{\frac{1}{1-x}} \frac{(2x-1)(1-x)^2 + 2(x^2-x-2)(1-x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^4}(5x-7) \end{aligned}$$

Inflexní bod $x = \frac{7}{5}$, funkce je konkávní na $(-\infty, 1)$, konkávní na $(1, \frac{7}{5})$ a konvexní na $(\frac{7}{5}, +\infty)$.

Asymptota v $-\infty$:

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - kx = \lim_{x \to -\infty} (x-3)e^{\frac{1}{1-x}} - x$$

$$= -3 + \lim_{x \to -\infty} x(e^{\frac{1}{1-x}} - 1) = -3 + \lim_{x \to -\infty} \frac{e^{\frac{1}{1-x}} - 1}{\frac{1}{1-x}} \frac{x}{1-x} = -4$$

Stejně to projde i v $+\infty$ a proto je funkce $y = x - 4$ asypmtotou v obou nekonečnech. Graf vypadá takto: